




---

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
22 februarie 2014**

Clasa a V-a

Bareme de corectare

**Subiectul I**

**a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat  $(a+b)(a-b-1)=2014$ .**

**b). Exista a si b numere naturale astfel incat  $(a^2+b^2+a+b)^2 + (a^2+b^2-a-b)^2=2014$ ?**

**Argumentati.**

Barem:

a).  $2014=2\cdot 19\cdot 53$ ,  $D_{2014}=\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$ .....2p

$a+b>a-b-1$ , rezulta ca avem urmatoarele patru cazuri:

i).  $a+b=2014$  si  $a-b-1=1$  cu solutia  $a=1008$ ,  $b=1006$ .

ii).  $a+b=1007$  si  $a-b-1=2$  cu solutia  $a=505$ ,  $b=502$ .

iii).  $a+b=106$  si  $a-b-1=19$  cu solutia  $a=63$ ,  $b=43$ .

iv)  $a+b=53$  si  $a-b-1=38$  cu solutia  $a=46$ ,  $b=7$ . .....2p

b).  $x = a^2+b^2+a+b=a(a+1)+b(b+1)=2k$ , k numar natural  
(produsul a doua nr. consecutive este numar par).

$y = a^2+b^2-a-b=a(a-1)+b(b-1)=2p$ , p numar natural.....2p

Deci  $x^2+y^2=(2k)^2 + (2p)^2=4k^2 + 4p^2=M_4$ . Dar  $2014=M_4+2$ , rezulta ca nu exista a si b numere naturale care sa verifice conditiile problemei.....1p



**Subiectul II**

a). Sa se scrie  $a=10^{2014}$  ca suma de doua patrate perfecte.

b). Sa se scrie  $b=6^{2015}$  ca suma de trei cuburi perfecte.

Barem:

a).  $10^2=6^2+8^2$ .....1p

$10^{2014}=10^2 \cdot 10^{2012}=(6^2+8^2) \cdot (10^{1006})^2=(6 \cdot 10^{1006})^2 + (8 \cdot 10^{1006})^2$  .....2p

b).  $6^2=1^3+2^3+3^3$ .....2p

$6^{2015}=6^2 \cdot 6^{2013}=(1^3+2^3+3^3) \cdot (6^{671})^3=(1 \cdot 6^{671})^3+(2 \cdot 6^{671})^3+(3 \cdot 6^{671})^3$ .....2p

**Subiectul III**

Fie  $M=\{2014,2015,2016,\dots,2113\}$ .

a). Sa se arate ca oricum am alege 51 numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.

b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca  $X \cup Y=M$  si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.

c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca  $X \cup Y=M$  si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y.

Barem:

a).  $\text{card}M=2113-2014+1=100$ .....1p

Consideram urmatoarele multimi:  $M_1=\{2014,2113\}$ ,  $M_2=\{2015,2112\}$ ,  
 $M_3=\{2016,2111\}$ ,... $M_{50}=\{2063,2064\}$ .

Suma elementelor fiecărei multimi este 4127 .....1p



Avem 51 numere si 50 multimi, rezulta cu principiul cutiei ca exista doua numere in aceeasi multime deci exista doua numere cu suma 4127 care este nr. prim(se demonstreaza).....1p

b). Consideram  $X=M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_{25}$  si  $Y= M_{26} \cup M_{27} \cup M_{28} \cup \dots \cup M_{50}$

X si Y sunt disjuncte. Suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y si este  $4127 \cdot 25$ . Deci exista multimele cu proprietatea din enunt.....2p

c). Presupunem ca exista doua multimi X si Y cu proprietatea din enunt. Daca produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y atunci produsul tuturor elementelor multimii M trebuie sa fie patrat perfect.

.....1p

Dar  $2014 \cdot 2015 \cdot \dots \cdot 2113$  este divizibil cu 2113 si nu este divizibil cu  $2113^2$  deci nu este patrat perfect(se arata ca 2113 e prim).....1p

Deci nu exista doua multimi cu proprietatea din enunt.

#### Subiectul IV

**Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?**

Barem:

Notam  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  numerele corespunzatoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem ca suma oricaror patru nr. inscrise in patru puncte consecutive este mai mica decat 203.

$$a_1+a_2+a_3+a_4 \leq 202, a_2+a_3+a_4+a_5 \leq 202, a_3+a_4+a_5+a_6 \leq 202, \dots, a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100} \leq 202,$$

$a_{98}+a_{99}+a_{100}+a_1 \leq 202, a_{99}+a_{100}+a_1+a_2 \leq 202, a_{100}+a_1+a_2+a_3 \leq 202$ . Adunand cele 100 relatii obtinem  $4(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}) \leq 20200$ , de unde  $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100} \leq 5050$ .

.....2p



---

Dar  $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}=1+2+3+\dots+100=5050$ . Egalitatea se obtine numai daca in toate cele 100 relatii scrise anterior avem egalitate. ....3p

Deci , de exemplu :  $a_1+a_2+a_3+a_4=202$ ,  $a_2+a_3+a_4+a_5=202$  de unde rezulta  $a_1=a_5$  . Dar  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  sunt distincte de unde rezulta contradictia. Presupunerea facuta este falsa. ....2p

Conluzia:nu este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203.