OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

Subiectul I

Se consideră numerele reale:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}} \quad \text{si}$$
$$y=2+2^2+2^3+....+2^{2014}$$

a) Să se arate că $x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$

b) Să se arate că numărul $n=2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1\right)$ este pătrat perfect.

Subiectul II

Demonstraţi că nu există $x, y, z \in Z$ astfel încât

$$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=-1$$

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E\in(AB)$. Dacă $BD\cap CE=\{P\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE}-2\cdot\frac{PD}{PB}=1$$

Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G şi H sunt mijloacele laturilor DC şi respectiv BC. Dreptele AG şi AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

a) Arătaţi că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.

b) Determinaţi raportul dintre aria trapezului EFHG şi aria pătratului ABCD.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este 3 ore.